

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ**

**БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ**

**Факультет прикладной математики и информатики**

Кафедра математического моделирования и управления

**КИРКОРОВА ЛЮБОВЬ СЕРГЕЕВНА**

**ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ КАПИЛЛЯРНОЙ  
ГИДРОСТАТИКИ О РАВНОВЕСНЫХ ФОРМАХ ЖИДКОСТИ,  
ВЫДАВЛИВАЕМОЙ ИЗ КАПИЛЛЯРА**

Дипломная работа  
студентки 5 курса 6 группы

“Допустить к защите“

**Зав. кафедрой ММУ**

\_\_\_\_\_ Гайшун И.В.

“ \_\_\_ ” \_\_\_\_\_ 2010 г.

**Руководитель**

*Полевиков Виктор Кузьмич*

кандидат физико-математических  
наук, доцент

**Рецензент**

*Ерофеев Виктор Тихонович*

доктор физико-математических  
наук, профессор

**Минск 2010**

## **АННОТАЦИЯ**

В данной работе построен и реализован алгоритм численного моделирования квазиравновесных форм свободной поверхности жидкости, выдавливаемой из капилляра.

## **ANNOTATION**

In this work algorithm of numerical modeling of quasiequilibrium form of the free liquid surface squeezed out of the capillary is built and implemented.

## **АННТАЦЫЯ**

У дадзенай рабоце пабудаваны і рэалізаваны алгарытм лікавага мадэлявання квазіраўнавесных формаў свабоднай паверхні вадкасці, выцісканай з капіляраў.

## РЕФЕРАТ

Дипломная работа, 43 с., 10 рис., 4 источника, 1 приложение.

### *ИТЕРАЦИОННО-РАЗНОСТНЫЙ МЕТОД, ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ, ФОРМА ПОВЕРХНОСТИ ЖИДКОСТИ, ОБЕЗРАЗМЕРИВАНИЕ ПЕРЕМЕННЫХ*

**Объект исследования** – система нелинейных дифференциальных уравнений, описывающих равновесную форму свободной поверхности жидкости.

**Цель работы** – построение алгоритма и задачи о численном решении и равновесных формах жидкости, выдавливаемой из капилляра.

**Метод исследования** – итерационно-разностный метод.

**Результаты работы** – построение и реализация алгоритма численного решения задачи о выдавливании жидкости из капилляра, визуализация полученных результатов в виде графиков, демонстрирующих эволюцию свободной поверхности жидкости.

**Область применения** – прикладные задачи гидростатики с нерегулярной линией контакта.

## СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ .....	5
1 ЗАДАНИЕ .....	<b>Error! Bookmark not defined.</b>
2 МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ЗАДАЧИ О ВЫДАВЛИВАНИИ ЖИДКОСТИ ИЗ КАПИЛЛЯРА.....	<b>Error! Bookmark not defined.</b>
2.1 Постановка задачи.....	<b>Error! Bookmark not defined.</b>
2.2 Параметрические уравнения свободной поверхности.....	<b>Error! Bookmark not defined.</b>
2.3 Граничные условия .....	<b>Error! Bookmark not defined.</b>
2.4 Нелокальное интегральное условие .....	<b>Error! Bookmark not defined.</b>
2.5 Обезразмеривание переменных .....	<b>Error! Bookmark not defined.</b>
2.5 Первый вариант задачи (жидкость движется снизу вверх).....	<b>Error! Bookmark not defined.</b>
2.5.1 Подзадача 1 (задача с закрепленными концами).....	<b>Error! Bookmark not defined.</b>
2.5.2 Подзадача 2. $U < U1$ (жидкость находится внутри капилляра).....	<b>Error! Bookmark not defined.</b>
2.5.3 Подзадача 3. $U > U2$ (жидкость растекается по горизонтальной поверхности) .....	<b>Error! Bookmark not defined.</b>
2.6 Второй вариант задачи (жидкость движется сверху вниз).....	<b>Error! Bookmark not defined.</b>
2.6.1 Подзадача 1 (задача с закрепленными концами).....	<b>Error! Bookmark not defined.</b>
2.6.2 Подзадача 2. $U < U1$ (жидкость находится внутри капилляра).....	<b>Error! Bookmark not defined.</b>
2.6.3 Подзадача 3. $U > U2$ (капля, висящая на горизонтальной поверхности).....	<b>Error! Bookmark not defined.</b>
3 ИТЕРАЦИОННО-РАЗНОСТНЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О КВАЗИРАВНОВЕСНЫХ ФОРМАХ КАПИЛЛЯРНОЙ ПОВЕРХНОСТИ.....	<b>Error! Bookmark not defined.</b>
3.1 Аналитическое решение для $Bo = 0$ .....	<b>Error! Bookmark not defined.</b>
3.2 Вычислительный алгоритм .....	<b>Error! Bookmark not defined.</b>
3.3 Тестовая задача об отрыве капли от горизонтальной плоскости.....	<b>Error! Bookmark not defined.</b>
3.3.1 Постановка задачи и алгоритм решения .....	<b>Error! Bookmark not defined.</b>
3.3.2 Численные результаты решения.....	<b>Error! Bookmark not defined.</b>
4 РЕЗУЛЬТАТЫ РАБОТЫ.....	<b>Error! Bookmark not defined.</b>
4.1 Отрыв капли от горизонтальной поверхности. ....	<b>Error! Bookmark not defined.</b>
4.2 Визуализация полученного решения .....	<b>Error! Bookmark not defined.</b>
ЗАКЛЮЧЕНИЕ .....	6
СПИСОК ИСПОЛЬЗУЕМЫХ ИСТОЧНИКОВ .....	7
ПРИЛОЖЕНИЕ А .....	8

## ВВЕДЕНИЕ

В данной работе рассматривается задача численного описания квазиравновесной формы жидкости, выдавливаемой из капилляра, в двух случаях: когда жидкость выдавливается вверх и когда выдавливается вниз. Специфика задачи состоит в том, что сначала жидкость движется по регулярной цилиндрической поверхности капилляра, потом переходит точку излома в основании капилляра. И далее жидкость начинает растекаться по горизонтальной поверхности. Таким образом, в каждом из двух случаев, в зависимости от положения точки контакта жидкости и капилляра, задача включает в себя три подзадачи с двумя видами граничных условий. В этом и состоит главная сложность ее решения.

Форма капиллярной поверхности описывается системой нелинейных дифференциальных уравнений, аналитическое решение которой можно найти только в некоторых частных случаях. Поэтому для решения данной задачи необходимо использовать численные методы.

Ранее численно данная задача не решалась, были только предприняты попытки получить некоторые теоретические выводы [1, 2]. Таким образом, численно данная задача решается впервые.

Для этого используется итерационно-разностный метод решения нелинейных дифференциальных уравнений, описывающих капиллярную поверхность, который подробно описан в [3]. Также используется замена переменных, которая имеет важное значение для построения алгоритма данного метода.

.....Последующий текст удален до главы ЗАКЛЮЧЕНИЕ.....

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Для описания формы поверхности жидкости использовались системы нелинейных дифференциальных уравнений, решение которых было получено итерационно-разностным методом. Большую роль в получении алгоритма данного метода играет замена переменных. В результате решение получается в безразмерном виде, поэтому для получения размерного решения необходимо делать пересчет переменных.

Для получения численного решения использовалась сетка со 100 узлами, а решение вычислялось для случая  $Bo = 1$  с различными значениями угла

смачивания  $\alpha = \frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{4}$ .

Результаты вычислений визуализированы на представленных в данной дипломной работе графиках. Также было посчитано критическое значение числа Бонда, при котором происходит отрыв капли.

Алгоритм был проверен на модельной задаче, для которой известно аналитическое значение критического числа Бонда.

## СПИСОК ИСПОЛЬЗУЕМЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Мышкис, А.Д. Методы решения гидромеханики для условий невесомости / А.Д. Мышкис, В.Г. Бабский, М.Ю. Жуков, Н.Д. Копачевский, Л.А. Слобожанин, А.Д. Тюнцов. – Киев: Наукова думка, 1992.
2. Мышкис, А.Д. Гидромеханика невесомости / А.Д. Мышкис, В.Г. Бабский, Н.Д. Копачевский, Л.А. Слобожанин, А.Д. Тюнцов. – М.: Наука, 1976.
3. Polevikov V. K. Methods for numerical modeling of two-dimensional capillary surfaces // Computational Methods in Applied Mathematics. – 2004. — Vol. 4, № 1. — P. 66-93.
4. Самарский А. А. Теория разностных схем. – М.: Наука, 1983.

## ПРИЛОЖЕНИЕ А

### Листинг программы, написанной на языке Fortran

```
!  
! main.f90  
!  
! Main program.
```

.....Текст программы из данного документа удален.....